数理解析研究所講究録
170巻 1973年 24-35



# Projective hypersurfaces について

東大理.　　岡 睦雄

## §1 入門

特異点をもたない hypersurface $H \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ はその isotopy class まで、次数 $d$ と $n$ のみで完全に、決定される([5])。ここでは、孤立特異点を何個か持つ hyperface $V$ の cohomology ring $H^*(V;Q)$ に point をしぼって、その構造をしらべることにする。$f(z_0,\ldots,z_{n+1})$ を $d$ 次斉次多項式で、$V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ とする。$\Sigma V = \{P_1,\ldots,P_\rho\}$ を $V$ の singular point とする。必要なら適当な、座標変換をして、$\Sigma V \subset U_0 = \{[z_0,\ldots,z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid z_0 \neq 0\}$ と考えられる。

## §2. Euler number, characteristic polynomials 及び zeta-函数

$F$ を $\mathbb{C}^{n+2}$ の hypersurface で、$f^{-1}(1)$ で定義する。$F$ は $f$ で原点に定義される Milnor fibering:

(*) $f/|f| : S^{2n+3} - K \longrightarrow S^1 \quad (K = f^{-1}(0) \cap S^{2n+3})$

の fiber に diffeomorphic で、この fibering の

自然な connection による lifted diffeomorphism は $h: F \longrightarrow F$, $h(z_0,\dots,z_{n+1})=(z_0\exp\frac{2\pi i}{d},\dots,z_{n+1}\exp\frac{2\pi i}{d})$ で定義される。明らかに, $h^d=id$. 一般に differential manifold $N$ とその上の periodic map $h: N\longrightarrow N$ ($h^d=id$) が与えられた時, $h$ の zeta 函数を $\zeta(t)=\exp\sum_{j=1}^{\infty}\chi_j t^j/j$ (ここで, $\chi_j$ = Euler number of Fix ($h^j$)) で定義する。又 j-th characteristic polynomial $P_j(t)$ は $t\cdot h_* - I_*: H_j(N;Q)\longrightarrow H_j(N;Q)$ の行列式で定義する。$\zeta(t)$ と $P_j(t)$ は次の等式を満している。([3])

$$\zeta(t)=P_0(t)^{-1}P_1(t)P_2(t)^{-1}\cdots P_n(t)^{\pm1} \quad\cdots(A)$$

以下 $H^*(N)$; $H_*(N)$ は $Q$ 係数とする。元にもどって, $h: F\to F$ の zeta 函数は, 容易な計算によって,

$$\zeta(t)=(1-t^d)^{-\frac{\chi(F)}{d}} \quad\cdots\cdots(B)$$

今 $\alpha_j$ を $P_j(t)$ の $(t-1)$ 多重度とする (= rank of Kernel $h_*-I_*: H_j(F)\to H_j(F)$). 我々の場合, $\alpha_j=0$ ($j\le n-1$) は容易に示される (cf Th. 2 の Corollary 4). 従って (A), (B) より

Proposition 1. $\frac{\chi(F)}{d}=1+(-1)^n(\alpha_n-\alpha_{n+1})$

$V$ 及び $F$ の Euler 標数の間には次の等式が成立する

Lemma 1. $\chi(V)=(n+2)-\frac{\chi(F)}{d}$

証明:(水谷忠良氏の idea)$(\mathbb{C}P^{n+1}, V)$ を三角分割して([2]),$N$ を $V$ の Regular neighborhood とします。$F$ は明らかに $\mathbb{C}P^{n+1}-V$ 上の $d$-fold covering ですから,$\chi(F) = d\cdot\chi(\mathbb{C}P^{n+1}-V)$. 一方 Euler 標数に関する和公式を使って,

$$\chi(\mathbb{C}P^{n+1}) = \chi(\mathbb{C}P^{n+1}-V) + \chi(V) - \chi(\partial N)$$
$$= \chi(\mathbb{C}P^{n+1}-V) + \chi(V)$$

従って,$\chi(V) = (n+2) - \dfrac{\chi(F)}{d}$ (終)

Lemma 2. $K = f^{-1}(0) \cap S^{2n+3}$ とすると,$H_*(K)$ は次の様になる。

$$\begin{cases} H_n(K) = \alpha_{n+1}\,Q, \quad H_{n+1}(K) = (\alpha_{n+1}+\alpha_n)\,Q \\ H_{n+2}(K) = \alpha_n\,Q, \quad H_{2n+1}(K) = Q \\ \tilde{H}_j(K) = 0 \quad (\text{他}) \end{cases}$$

証明:(*) の Wang sequence

$$\cdots \to H_{j+1}(S^{2n+3}-K) \to H_j(F) \to H_j(F) \to H_j(S^{2n+3}-K) \to \cdots$$

と,Alexander duality $\tilde{H}^j(K) = \tilde{H}_{2n+2-j}(S^{2n+3}-K)$ より明白。(終)

さて,以上の準備の元で,$H^*(V)$ は次の様になる。

定理 1. (i) ($n$: odd)
$$\begin{cases} H^0(V) = H^2(V) = H^4(V) = \cdots = H^{n-1}(V) = Q \\ H^n(V) = \alpha_{n+1}\,Q, \quad H^{n+1}(V) = (\alpha_n+1)\,Q \\ H^{n+3}(V) = H^{n+5}(V) = \cdots = H^{2n}(V) = Q \\ H^{2j+1}(V) = 0 \quad (2j+1 \neq n+1) \end{cases}$$

(ii) ($n$: even)
$$\begin{cases} H^0(V)=H^2(V)=\cdots=H^{n-2}(V)=Q \\ H^n(V)=(\alpha_{n+1}+1)Q,\quad H^{n+1}(V)=\alpha_n\, Q \\ H^{n+2}(V)=H^{n+4}(V)=\cdots=H^{2n}(V)=Q \\ H^{2j+1}(V)=0 \quad (j\neq n+1) \end{cases}$$

証明： Hopf bundle $\pi: S^{2n+3}\longrightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$ 及びその制限 $\pi: K\longrightarrow V$ を考えて，次の2つの Gysin sequence を得る。

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{j+1}(K) \arrow[r] & H^j(V) \arrow[r, "\cdot\tau"] & H^{j+2}(V) \arrow[r] & H^{j+2}(K) \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^{j+1}(S^{2n+3}) \arrow[r] \arrow[u] & H^j(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r, "\cdot t"] \arrow[u] & H^{j+2}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{j+2}(S^{2n+3}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \end{tikzcd} \quad \cdots (G)$$

ここで，$t$ は Hopf bundle の Euler class $\in H^2(\mathbb{C}P^{n+1})$ $\tau$ はその制限. $j$ に関する帰納法で，次の diagram は可換な同型を与える： ($j\leq n-3$)

$$\begin{tikzcd} H^j(V) \arrow[r, "\cdot\tau", "\sim"'] & H^{j+2}(V) \\ H^j(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r, "\sim", "\cdot t"'] \arrow[u, "\sim"'] & H^{j+2}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd} \quad \cdots (G_1)$$

一方 $\tau^n$ は $V$ の fundamental cocycle の $d$ 倍である事が知られているから，$j$ に関して下向きの帰納で，$(G_1)$ は $j\geq n+2$ でも成立する. 故に$(G)$ は次様になる：

1) $n$: odd

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^n(V) \arrow[r] & H^n(K) \arrow[r] & H^{n-1}(V) \arrow[r, "\cdot\tau"] & H^{n+1}(V) \arrow[r, "j"] & H^{n+1}(K) \arrow[r] & H^n(V) \arrow[r] & 0 \\ & & & H^{n-1}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[r, "\cdot t", "\sim"'] \arrow[u, "\sim"'] & H^{n+1}(\mathbb{C}P^{n+1}) \arrow[u] & & & \end{tikzcd}$$

$H^{n-1}(V) \xrightarrow{\cdot\tau} H^{n+1}(V)$ が injection である事を考えれば,

$H^n(V) \cong H^n(K)$, $\quad H^{n+1}(V) \cong \mathrm{Im}\,\tau \oplus \mathrm{Ker}\, j \cong (\alpha_n + 1)\, Q$

2) $n$: even

$$0 \to H^{n-2}(V) \xrightarrow{\cdot\tau} H^n(V) \to H^n(K) \to 0$$

$$0 \to H^{n+1}(V) \to H^{n+1}(K) \to H^n(V) \xrightarrow{\cdot\tau} H^{n+2}(V) \to H^{n+2}(K)$$
$$\to H^{n+1}(V) \to 0$$

同様に, $H^n(V) = (\alpha_{n+1} + 1)\, Q$, $\quad H^{n+1}(V) = \alpha_n\, Q$ Q.E.D.

Corollary 1. 環としての $H^*(V:Q)$ の構造は

$$H^*(V) \cong Q[\tau, x_1, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}, y_1, \ldots, y_{\alpha_n}]/\sim$$

ここで, $\tau \in H^2(V)$, $x_j \in H^n(V)$, $y_k \in H^{n+1}(V)$ で, $\sim$ は

$\tau^{n+1} = 0$, $\tau \cdot x_j = 0$ $(j = 1, \ldots, \alpha_{n+1})$, $\tau \cdot y_k = 0$ $(k = 1, \ldots, \alpha_n)$

$x_j y_k = 0$. $y_j \cdot y_k = 0$, $x_i \cdot x_j = a_{ij} \tau^n$ $(a_{ij} \in Q)$).

($n$: odd なら $a_{ij} = -a_{ji}$)

注意 ① Proposition 1 は全く一般に成立する.

② Theorem も全く一般に成立する. すなわち,

$\alpha_j$ を rank of kernel: $h_* - I_* : H_j(F) \to H_j(F)$ とすると,

rank $H^{n+j}(V) = \alpha_{n+1-j} + \varepsilon(n+j)$ ここで, $\varepsilon(n+j)$ は

$n+j$ は偶数なら 1, ~~奇数なら~~ 0 をとる. 環構造も同様。

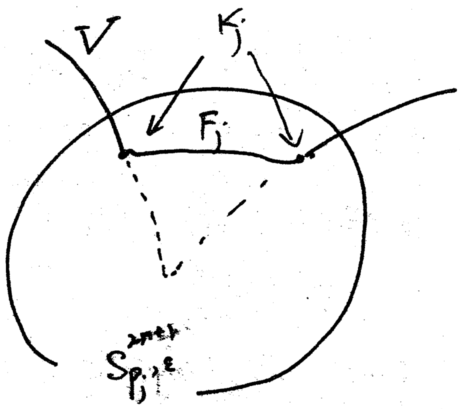
~~詳細は[6]をみられたい.~~ ($\Rightarrow$ §4 or [6]).

## §3. Topological resolutions

$M$ を微分可能多様体, $\pi$ を $M$ から $V$ への連続写像を

する。$\{\pi : M \to V\}$ が $V$ の topological resolution であるとは，(i) $\pi$ は proper (ii) surjection (iii) $M - \pi^{-1}(\Sigma V) \xrightarrow{\pi} V - \Sigma V$ は diffeomorphism である時を言う。§1 と同じ仮定の下で，$P_j$ を中心とする Milnor fibering を考える。$\varepsilon$ を小さく選んで，$K_j = g^{-1}(0) \cap S^{2n+1}_{p_j,\varepsilon}$，$F_j = \{g > 0\} \cap S^{2n+1}_{p_j,\varepsilon}$ とする．$(j = 1, 2, \cdots, \rho)$

$X^d$ を $\mathbb{C}P^{n+1}$ の中の特異点を持たぬ $d$ 次の hypersurface とする．その様なものは，微分同型を除いて，一意に決定される．([5])




定理 2．次を満す resolution $\pi : X^d \to V$ が存在する．$\forall \delta \leq \varepsilon$ に対して，$N_\delta(P_j)$ を $V \cap D^{2n+2}_{p_j,\delta}$ とすると，$\pi^{-1}(N_\delta(p_j))$ は $\bar{F}_j$ に diffeomorphic であって，次の図式は homotopy の意味で可換．

$$\begin{tikzcd} X^d \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "i"'] & V \arrow[d, "j"] \\ & \mathbb{C}P^{n+1} \end{tikzcd} \qquad (i, j : \text{inclusions})$$

補題 2．次の条件をみたす family $\{f(z,t)\}_{t \in U}$ がある．(0) $U$ は $0 \in \mathbb{C}$ を含む近傍．(i) $f(z,0) = f(z)$ (ii) $f(z,t)$ は任意の $t$ について，$d$ 次斉次多項式で，$t \neq 0$ なら $\mathbb{C}P^{n+1}$

の non-singular hypersurface を定義する. (ii) $A = \{(z,t) \in \mathbb{C}P^{n+1} \times U \mid \frac{\partial f}{\partial z_j}(z,t)=0,\ j=1,2,\dots,n+1\} \cap U_0$ は $(p_j, 0)$ で孤立. しかも $\exists \varepsilon>0$, $\forall t$ に対して, $S^{2n+1}_{p_j,\varepsilon}$ と $V_t = \{z \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid f(z,t)=0\}$ が transverse.

証明. $g(z_1,\dots,z_{n+1}) = f(1,z_1,\dots,z_{n+1})$ とすると, 代数的集合上の多項式函数は有限個の critical values しか持たないので, $\exists\delta>0$, $D^2_{3\delta}$ の中の critical value は $0$ だけとできる. $f(z,t) \equiv f(z) + t z_0^d$ と定義する. ($t \in D^2_{\delta}$). (0),(i) は明らか. (ii): $U_0 = \{z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ でのみ check すれば良い. $V\left(\frac{\partial f(z,t)}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f(z,t)}{\partial z_{n+1}}, f(z,t)\right) \cap U_0 = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\ ),\dots,\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(\ ), f+t=0\right) \cap \{z_0=1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. 故に, $\delta$ に関する仮定より, 上の集合は $t=0$ でのみ non-empty. (iii): 全く同様である. $\varepsilon$ は $g^{-1}(0)$ と $S^{2n+1}_{p_j,\varepsilon}$ が transverse になる様にとって, $\delta_1$ を $g^{-1}(\eta)$ と $S^{2n+1}_{p_j,\varepsilon}$ が $|\eta|<2\delta_1$ なら transverse になる様にとれば, あらためて, $f(z,t)$ を $D^2_{\delta_1}$ に制限すればよい. (終)

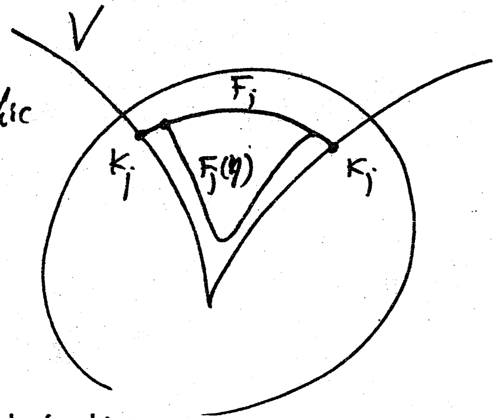
定理2の証明: 上の deformation $f(z,t)$ を使って, $L = \{(z,t)\in \mathbb{C}P^{n+1}\times[0,\delta_1] \mid f(z,t)=0\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}\times[0,\delta_1]$ を考える. $L$ は $\{t=0\}$ に有限個の特異点をもつ, diff. manifold である. $\pi_1 : L \longrightarrow [0,\delta]$ を $\pi_1(z,t)=t$ で定義する. 明らかに, $\pi_1^{-1}(0)=V$ で, $\pi_1^{-1}(t)\cong X^d$ ($t\neq 0$) $\pi_1$ は $L-\Sigma V$ 上で non-degenerate であるから, そこで,

$\pi_1$ の connection vector field $v$ を作ると明らかに，$t\neq 0$ で，$v$ は積分可能．$h_t$ をその one-parameter group とする．$h_t: \pi_1^{-1}(\delta_1) \triangleq X^{\delta} \longrightarrow \pi_1^{-1}(t)$ $(t\neq 0)$．さて．

$$\pi: X^{\delta} \longrightarrow \pi_1^{-1}(0) = V$$

を $\pi(z) = \lim\limits_{t\to +0} h_t(z)$ $\left(z\in \pi_1^{-1}(\delta_1)\right)$ で定義する．$\Sigma V$ は $L$ の中で，孤立しているので，$\pi$ は連続で，$\pi | X^{\delta} - \pi^{-1}(\Sigma V) \longrightarrow V - \Sigma V$ は diffeomorphism であることは明らか．最後の部分の証明の為に次の様な manifold $\hat{V}$ を考える．$\eta$ を十分小さくとって，$F_j(\eta) = g^{-1}(\eta) \cap D_{j,\varepsilon}^{2n+2}$ とする．$F_j(\eta)$ は $\overline{F_j}$ に diffeomorphic．$(\partial F_j(\eta) \triangleq K_j)$

$$\hat{V} \equiv \left(V - \bigcup_{j=1}^{\rho} V\cap \mathrm{Int}\, D_{j,\varepsilon}^{2n+1}\right) \bigcup_{K_j} F_j(\eta)$$

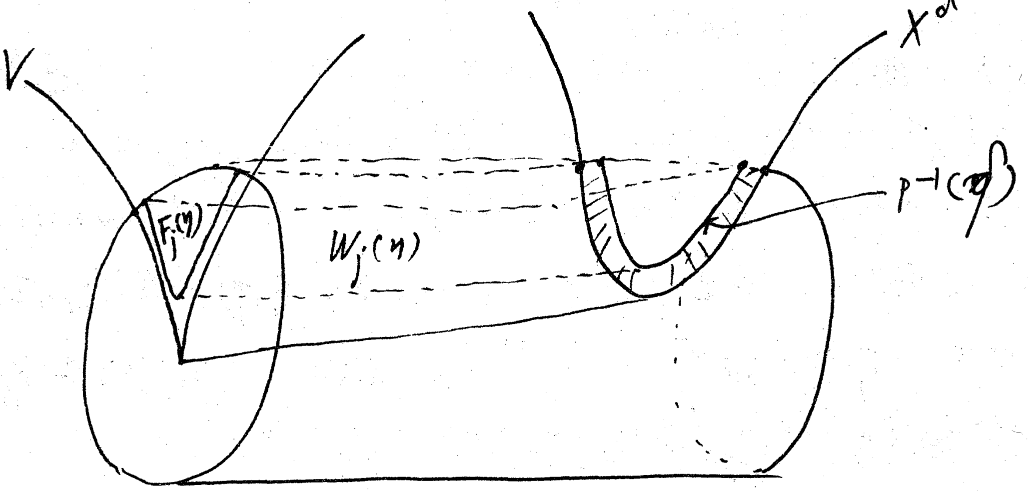



補題3. $\hat{V}$ は $X^{\delta}$ に diffeomorphic である．

proof: $f(z,t)$ を補題2のものとします．$g(z_1,\dots,z_{n+1},t) = f(1, z_1,\dots,z_{n+1},t)$ $= g(z)+t$ とする．$\eta$ を小さくとれば，$X_{t,\eta} = \{z\in\mathbb{C}^{n+1} \mid g(z,t)=\eta\}$ は $S_{j,\varepsilon}^{2n+1}$ と transverse. $(t\le\delta_1)$．$W_j(\eta) \equiv \{(z,t)\in D_{j,\varepsilon}^{2n+2}\times[0,\delta_1] \mid g(z,t)=\eta\}$，$p(z,t)=t$ で，$p: W_j(\eta)\longrightarrow [0,\delta_1]$ を定義する．明らかに，$p$ は non-degenerate で，proper mapping

であるから Ehresmann's fibering theorem によって、
$\exists\, \varphi_j : F_j(\eta) \to p^{-1}(d')$ は diffeomorphism.
$p^{-1}(d')$ と $\pi_1^{-1}(d) \cap D_{j,\varepsilon} = X^d \cap D_{j,\varepsilon}$ が diffeo なる事も明らかであるから、これらから求める微分同型
$\varphi : V \to X^d$ を得る.

(終)




Corollary 1. (Kato, M)

$$\chi(V) = \chi(X^d) - (-1)^n \sum_{j=1}^{p} \mu_j$$

$$= \frac{1}{d}\{(1-d)^{n+2} + (n+2)d - 1\} + (-1)^{n+1} \sum_j \mu_j$$

ここで、 $\mu_j = \operatorname{rank} H_n(F_j) =$ multiplicity of $g$ at $P_j$.

Corollary 2. $\chi(F) = 1 + (-1)^{n+1}(d-1)^{n+2} + (-1)^n \sum_{j=1}^{p} \mu_j d$

proof: 補題 1 及び、Corollary 1.

Corollary 4. $\pi_*: H_j(X^d) \longrightarrow H_j(V)$

は $\left.\begin{array}{l} j \leq n-1 \\ \text{or} \\ j \geq n+2 \end{array}\right\}$ で isomorphism, $j=n$ で onto $j=n+1$ : injection.

(証明): $(V-\bigcup_{j=1}^{\rho} V\cap D_{j,\varepsilon},\ \bigcup_{j=1}^{\rho} V\cap D_{j,\varepsilon})$ と $(V-\bigcup_{j=1}^{\rho} V\cap D_{j,\varepsilon},\ \bigcup_{j=1}^{\rho} \overline{F_j})$ の pairs に対する Mayer-Vietoris exact sequence と 補題3.

§4. General hypersurfaces.

$f(z_0,\cdots,z_{n+1})$ を square-free な $d$ 次 homogeneous polynomial として, $V=f^{-1}(0)\subset \mathbb{C}P^{n+1}$, $F=f^{-1}(1)\subset \mathbb{C}^{n+2}$, $K=f^{-1}(0)\cap S^{2n+3}$ とする. $P_j(t)$ を $f$ の $j$-th characteristic polynomial とする. $\alpha_j$ を divisor $P_j(t)$ の $\langle 1\rangle$ の係数 (= rank of kernel: $h_*-I_*: H_j(F)\longrightarrow H_j(F)$ ) とする. その時 Th.1 は次の様に拡張される.

Theorem 3. $\operatorname{rank} H^{n+j}(V) = \alpha_{n+1-j} + \varepsilon(n+j)$

ここで; $\varepsilon(n+j) = \begin{cases} 1 & n+j: \text{even} \\ 0 & n+j: \text{odd} \end{cases}$

更に ring としては, 適当な base $x_1^{(n+j)},\cdots,x_{\alpha_{n+1-j}}^{(n+j)} \in H^{n+j}(V)$ と $\tau\in H^2(V)$ (Euler class of Hopf fibering) を使って, 次の様に表される.

$$H^*(V) \cong \mathbb{Q}[\tau, x_1^{(n)},\dots,x_{\alpha_{n+1}}^{(n)};\dots;x_1^{(2n)},\dots,x_{\alpha_1}^{(2n)}]/\sim$$

ここで、$\tau\cdot x_k^{(n+j)}=0$ $(\forall j,\ \forall k)$, $x_k^{(n+j)}\cdot x_s^{(n+l)}=0$ $(\forall (j,l)\neq(0,0);\ \forall k,\ \forall s)$ $x_j^{(n)}\cdot x_k^{(n)} = a_{jk}\tau^n + \sum_l b_{jk}^l x_l^{(2n)}$, $\mathbb{Q}[\ ]/\sim$ は $n$ が odd のとき、非可換で、$x_j^{(n)}\cdot x_k^{(n)} = -x_k^{(n)}\cdot x_j^{(n)}$ を示す。

(証明) $F$ には $\mathbb{Z}_d$ が、lifted diffeomorphism
$h: F\to F$ $\quad (z_0,\dots,z_{n+1})\mapsto(z_0\exp\frac{2\pi i}{d},\dots,z_{n+1}\exp\frac{2\pi i}{d})$
で、free に operate している。故に Borel によって、

$$H^j(F/\mathbb{Z}_d) = H^j(\mathbb{C}P^{n+1}-V)\cong [H^j(F)]^{\mathbb{Z}_d}$$
$$= \mathrm{Kernel}\{(h_*-I_*): H^j(F)\to H^j(F)\}$$
$$\cong \alpha_j \mathbb{Q}$$

故に、$(\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}P^{n+1}-V)$ に関する exact sequence (homology) より。

$$H^{n+j}(V) \underset{\text{duality}}{\cong} H_{n+2-j}(\mathbb{C}P^{n+1},\mathbb{C}P^{n+1}-V)$$
$$\cong (\alpha_{n+1-j}+\varepsilon(n+j))\mathbb{Q}$$

又、ring の構造と、$K\xrightarrow{S^1} V$ の Gysin sequence を使って、容易に求められる。詳細は [6] を見よ。

文 献

[1] M. Kato : Euler-Poincaré characteristics of complex hypersurfaces with isolated singularities

[2] S. Lojasiewicz : Triangulation of semi-analytic sets, Ann. of Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser, 3, 18, 1964

[3] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Sdudies, No 61, 1969.

[4] M. OKa : On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials. to appear in Topology

[5] M. OKa: Notes on projective hypersurfaces.

[7]. M. OKa: Ring structures of projective hypersurfaces.